

一种新型 3-R(4r)(4r)R 并联机构及运动学分析

韩秀英,李旭莹,黄 杰

(河南科技大学机电工程学院,河南 洛阳 471003)

摘 要:本文提出了一种 3-R(4r)(4r)R 型全对称三平移并联机构,运用螺旋理论分析了该并联机构实现三平移的机构学原理,进行了驱动输入的选取,分析了机构平台奇异、驱动奇异和支链奇异的特性,建立了机构运动学模型,获得了运动学正、逆解析解,并通过数值仿真验证了正逆解模型的正确性。研究结果表明,该并联机构无平台奇异,运动学模型简单且正解唯一。

关键词:并联机构;螺旋理论;运动学;奇异性

中图分类号:TH112

文献标志码:A

doi:10.3969/j.issn.1674-3407.2024.02.005

Structure and Kinematics Analysis of a Novel 3-R(4r)(4r)R Parallel Mechanism

HAN Xiuying, LI Xuying, HUANG Jie

(School of Mechatronics Engineering, Henan University of Science and Technology, Luoyang 471003, Henan, China)

Abstract: A novel absolutely symmetrical 3-R(4r)(4r)R parallel mechanism with three translational degrees of freedom is proposed. Based on the screw theory, the mechanism principle of achieving the three-dimensional translations is analyzed, and the drive input joints are chosen and discussed, and the platform singularity and the drive singularity and the branch singularity of the parallel mechanism are analyzed. Then, the kinematics model is established, and the analytic solutions of the inverse and forward positions are obtained. By use of numerical simulation, the correctness of the inverse and forward position solutions are verified. The research results show that there is no platform singularity in the parallel mechanism, and the kinematic model is simple, and the forward position solution is unique.

Keywords: parallel mechanism, screw theory, kinematics, singularity

1 引 言

自 Clavel 提出 Delta 机构以来,三平移并联机构在搬运、包装、分拣及医疗手术等领域得到了广泛应用,日益受到人们的关注^[1,2]。沈惠平等^[3,4]先后提出了 3-R//R//R-4r 和 3-P ⊥ R//4r//R 型三平移解耦并联机构;张纹等^[5]设计了 3-RUC 型三平移完全对称的并联机构;刘延斌等^[6]提出了 3-RRRU 型三平移全对称并联机构;李永泉等^[7]基于图谱法优选出 4 种新型三平移并联机构;赵一楠等^[8]设计了可用于抓取的三平移解耦并联机构;张发海等^[9]设计了一种低耦合度的 2PaUU-PPaP 型三平移并联机构。这些机构都有各自的特点和特殊性能,然而同时具有无奇异、全对称、制造简单、位置正解唯一且表达式简单等特点的三平移并联机构却为数不多。

本文基于 R 副和(4r)平行四边形回路设计了一种新颖的具有三平移自由度的 3-R(4r)(4r)R 型并联机构,然后从机构学原理上论证该机构的运动自由度,选取驱动输入,研究机构平台奇异、驱动奇异和支链奇异的特性,最后推导出机构的运动学模型以及运动学正逆解,并通过数值仿真对其正确性进行了验证。

2 机构的自由度和输入选择

图 1 所示为 3-R(4r)(4r)R 并联机构原理图,该机构由 3 个完全对称的支链构成,其支链则由 2 个转动副(R 副)和 2 个(4r)平行四边形回路(由 4 个 R 副按平行四边形布置而成)构成,如图 2(a)所示。支链端部 2 个 R 副的轴线相互平

行,中部 2 个平行四边形所有的 R 副轴线也互相平行,但与端部 R 副的轴线相垂直。与动平台固接的 3 个 R 副中心点 M_1 、 M_2 、 M_3 的分布圆半径为 r_m ,与基平台固接的 3 个 R 副中心点 B_1 、 B_2 、 B_3 所在的分布圆半径为 r_b 。以基平台的中心为坐标原点建立惯性坐标系 $O-XYZ$,其 X 、 Y 轴在基平台平面内;以动平台的中心为坐标原点建立动平台体坐标系 $O_m-X_mY_mZ_m$,其 X_m 、 Y_m 轴与 X 、 Y 轴平行且指向相同。

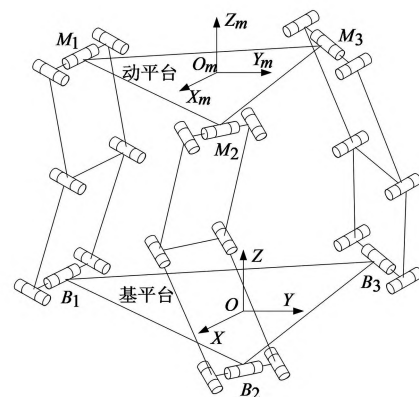


图 1 3-R(4r)(4r)R 并联机构

机构第 i ($i=1,2,3$) 条支链的参数设置如图 3 所示,其中

[收稿日期] 2024-02-03

[作者简介] 韩秀英(1970-),女,吉林长春人,河南科技大学机电工程学院实验师,研究方向为机械系统设计与控制。

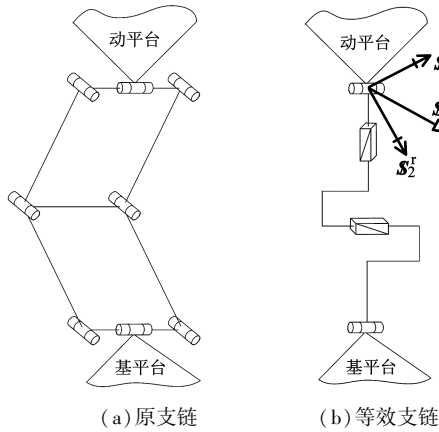


图2 R(4r)(4r)R 支链

l 为杆长, α_{i1} 为邻近基平台的平行四边形机构的侧向转角, α_{i2} 为邻近动平台的平行四边形机构相对于前一平行四边形机构的侧向转角, θ_i 为支链相对基平台平面的转角。

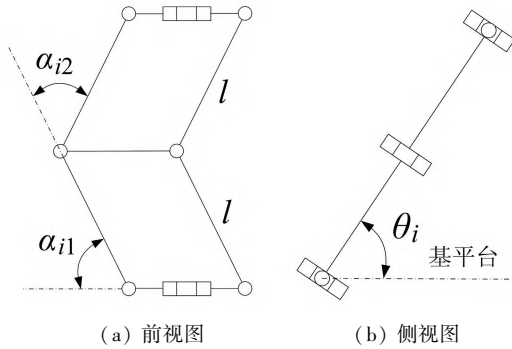


图3 支链参数示意图

2.1 自由度分析

R(4r)(4r)R 支链运动学上可等效于如图 2(b) 所示的 RPPR 支链, 其中一个 P 副垂直于两个 R 副轴线, 另一个 P 副平行于两个 R 副轴线。该支链对动平台将产生无数个垂直于 R 副轴线的约束力偶, 而这无数个约束力偶可等效为 2 个正交的约束力偶 $\mathbf{s}_1^r$ 、 $\mathbf{s}_2^r$ 。由空间几何理论可知, 3 条机构支链对动平台共有 6 个约束力偶, 而这 6 个约束力偶当机构处于一般位形不会平行于同一平面, 也不会平行于同一直线。因此, 这 6 个约束力偶所张成的力偶空间必然有如下的 3 个正交基:

$$\begin{cases} \mathbf{s}_1^r = (0 \ 0 \ 0; 1 \ 0 \ 0) \\ \mathbf{s}_2^r = (0 \ 0 \ 0; 0 \ 1 \ 0) \\ \mathbf{s}_3^r = (0 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 1) \end{cases} \quad (1)$$

由螺旋理论, 进一步可得 $\mathbf{s}_1^r$ 、 $\mathbf{s}_2^r$ 、 $\mathbf{s}_3^r$ 反螺旋的正交基:

$$\begin{cases} \mathbf{s}_1^v = (0 \ 0 \ 0; 1 \ 0 \ 0) \\ \mathbf{s}_2^v = (0 \ 0 \ 0; 0 \ 1 \ 0) \\ \mathbf{s}_3^v = (0 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 1) \end{cases} \quad (2)$$

实质上, $\mathbf{s}_1^v$ 、 $\mathbf{s}_2^v$ 、 $\mathbf{s}_3^v$ 就是动平台的可能运动螺旋。由此可见, 在基平台固定不动的情况下, 动平台在一般位形下所具有的自由运动即为沿惯性坐标系 X 、 Y 、 Z 轴的三维平移。

并联机构的自由度可按下式计算^[10]:

$$F = d(n - g - 1) + \sum_{i=1}^g f_i + s - k \quad (3)$$

式中, d 为机构的阶数; n 、 g 分别为构件数目和运动副

数目; f_i 为第 i 个运动副的相对自由度; s 为除去公共约束后剩余的螺旋个数; k 为剩余螺旋所构成的螺旋系的秩。

如图 2(b) 所示, 该支链为原支链的等效支链, 一般位形下 3 个支链对动平台没有公共约束。每条等效支链有 3 个等效构件和 4 个等效运动副 (2 个 P 副和 2 个 R 副, 相对自由度皆为 1), 所以机构的等效构件总数为 11, 运动副总数为 12。同时, 该机构为空间并联机构, 阶数为 6, 由式 (3) 可得机构的自由度 $F=3$, 这再次验证了上述分析的正确性。

2.2 驱动输入选择

选取与基平台固接的 3 个 R 副为驱动副, 这样可以有效避免驱动元件在机构运动时产生附加惯性力, 减少机构的运动控制能耗。

3 机构的奇异分析

3.1 平台奇异

式 (1) 所示的 3 个正交基 $\mathbf{s}_1^r$ 、 $\mathbf{s}_2^r$ 、 $\mathbf{s}_3^r$ 为 3 条支链对动平台的约束力偶的 3 个基底, 而这 3 个力偶基不会随机构的位形变化而降秩, 因此该机构不存在平台奇异。

3.2 驱动奇异

如图 2(b) 所示, $\mathbf{s}^a$ 为驱动副刚化后支链对动平台的驱动力线矢, 其与动平台上的 R 副轴线垂直相交, 并垂直于两个 P 副。对于图 2(a) 所示的原支链, 驱动力线矢 $\mathbf{s}^a$ 与两个平行四边形中的 6 个 R 副轴线都平行, 而支链对动平台共有 3 个驱动力线矢, 如图 4(a) 所示。当 $r_b = r_m$ 时, 这 3 个驱动力线矢都将与空间某一直线 L 形成空间垂直关系, 此时动平台沿直线 L 的平移运动将失去驱动力和约束力, 即发生驱动奇异。另外, 机构参数满足 $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$ 时, 3 个驱动力线矢将平行于 Z 轴, 如图 4(b) 所示, 此时机构沿 X 、 Y 轴的平移将失控, 发生驱动奇异。

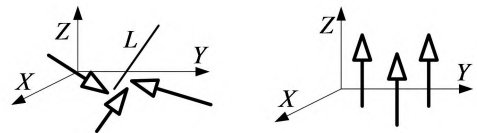


图4 动平台的驱动力线矢

3.3 支链奇异

当连接动平台的 R 副轴线与连接基平台的 R 副轴线重合时, 驱动力线矢消失, 此时发生支链奇异。

4 机构的运动学模型

参考图 1 和图 3, 设 x 、 y 、 z 分别为动平台中心在基平台坐标系 $O-XYZ$ 中的 X 、 Y 、 Z 轴坐标分量, 同时假设参数 $r_b \neq r_m$, 则通过运动分析可得到如下的机构约束方程:

对于第一支链, 有:

$$\begin{cases} l \cos \theta_1 [\sin(a_{11} + a_{12}) + \sin a_{11}] = r_b - r_m - x \\ l [\cos(a_{11} + a_{12}) + \cos a_{11}] = y \\ l \sin \theta_1 [\sin(a_{11} + a_{12}) + \sin a_{11}] = z \end{cases} \quad (4)$$

对于第二支链, 有:

$$\begin{cases} l \cos \theta_2 [\sin(a_{21} + a_{22}) + \sin a_{21}] - \sqrt{3} l [\cos(a_{21} + a_{22}) + \cos a_{21}] = r_b - r_m + 2x \\ \sqrt{3} l \cos \theta_2 [\sin(a_{21} + a_{22}) + \sin a_{21}] + l [\cos(a_{21} + a_{22}) + \cos a_{21}] = \sqrt{3} (r_b - r_m) - 2y \\ l \sin \theta_2 [\sin(a_{21} + a_{22}) + \sin a_{21}] = z \end{cases} \quad (5)$$

对于第三支链, 有:

$$\begin{cases} l\cos\theta_3[\sin(a_{31}+a_{32})+\sin a_{31}]+\sqrt{3}l[\cos(a_{31}+a_{32})+\cos a_{31}]=r_b-r_m+2x \\ \sqrt{3}l\cos\theta_3[\sin(a_{31}+a_{32})+\sin a_{31}]-l[\cos(a_{31}+a_{32})+\cos a_{31}]=\sqrt{3}(r_b-r_m)+2y \\ l\sin\theta_3[\sin(a_{31}+a_{32})+\sin a_{31}]=z \end{cases} \quad (6)$$

通过进一步整理,可以得到如下的驱动空间与笛卡尔空间之间的运动学模型:

$$\begin{cases} \tan\theta_1 = \frac{z}{r_b-r_m-x} \\ \tan\theta_2 = \frac{z}{r_b-r_m+\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y} \\ \tan\theta_3 = \frac{z}{r_b-r_m+\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y} \end{cases} \quad (7)$$

5 机构的正逆解模型

5.1 逆解

由式(7)所示的运动学模型,可得到如下关于驱动角位移 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 的逆向解析解:

$$\theta_1 = \begin{cases} \arctan \frac{z}{r_b-r_m-x} & x < r_b-r_m \\ \frac{1}{2}\pi & x = r_b-r_m, z \geq 0 \\ -\frac{1}{2}\pi & x = r_b-r_m, z < 0 \\ \pi + \arctan \frac{z}{r_b-r_m-x} & x > r_b-r_m, z \geq 0 \\ -\pi + \arctan \frac{z}{r_b-r_m-x} & x > r_b-r_m, z < 0 \end{cases}$$

$$\theta_2 = \begin{cases} \arctan \frac{z}{r_b-r_m+\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y} & \sqrt{3}y-x < 2(r_b-r_m) \\ \frac{1}{2}\pi & \sqrt{3}y-x = 2(r_b-r_m), z \geq 0 \\ -\frac{1}{2}\pi & \sqrt{3}y-x = 2(r_b-r_m), z < 0 \\ \pi + \arctan \frac{z}{r_b-r_m+\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y} & \sqrt{3}y-x > 2(r_b-r_m), z \geq 0 \\ -\pi + \arctan \frac{z}{r_b-r_m+\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y} & \sqrt{3}y-x > 2(r_b-r_m), z < 0 \end{cases}$$

$$\theta_3 = \begin{cases} \arctan \frac{z}{r_b-r_m+\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y} & \sqrt{3}y+x < 2(r_m-r_b) \\ \frac{1}{2}\pi & \sqrt{3}y+x = 2(r_m-r_b), z \geq 0 \\ -\frac{1}{2}\pi & \sqrt{3}y+x = 2(r_m-r_b), z < 0 \\ \pi + \arctan \frac{z}{r_b-r_m+\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y} & \sqrt{3}y+x > 2(r_m-r_b), z \geq 0 \\ -\pi + \arctan \frac{z}{r_b-r_m+\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y} & \sqrt{3}y+x > 2(r_m-r_b), z < 0 \end{cases}$$

5.2 正解

假设 $r_b \neq r_m$,由式(7)所示的运动学模型,可以得到如下关于笛卡尔空间坐标 x 、 y 、 z 的正向解析解:

(1)当 $\theta_1 \neq 0$ 、 $\theta_2 \neq 0$ 、 $\theta_3 \neq 0$ 、 $\theta_1 \neq \pm \frac{1}{2}\pi$ 、 $\theta_2 \neq \pm \frac{1}{2}\pi$ 、 $\theta_3 \neq \pm \frac{1}{2}\pi$ 时,有:

$$\begin{cases} x = \frac{\tan\theta_1 \tan\theta_2 + \tan\theta_1 \tan\theta_3 - 2\tan\theta_2 \tan\theta_3}{\tan\theta_1 \tan\theta_2 + \tan\theta_1 \tan\theta_3 + \tan\theta_2 \tan\theta_3} (r_b-r_m) \\ y = \frac{\sqrt{3} \tan\theta_1 (\tan\theta_2 - \tan\theta_3)}{\tan\theta_1 \tan\theta_2 + \tan\theta_1 \tan\theta_3 + \tan\theta_2 \tan\theta_3} (r_b-r_m) \\ z = \frac{3 \tan\theta_1 \tan\theta_2 \tan\theta_3}{\tan\theta_1 \tan\theta_2 + \tan\theta_1 \tan\theta_3 + \tan\theta_2 \tan\theta_3} (r_b-r_m) \end{cases}$$

(2)当 $\theta_1 = 0$ 、 $\theta_2 = 0$ 、 $\theta_3 = 0$ 时,机构发生奇异, x 、 y 的解不唯一,而 $z = 0$ 。

(3)当 $\theta_1 = \frac{1}{2}\pi$ 、 $\theta_2 \neq \pm \frac{1}{2}\pi$ 、 $\theta_3 \neq \pm \frac{1}{2}\pi$ 时,有:

$$\begin{cases} x = r_b-r_m \\ y = \frac{-\sqrt{3} \tan\theta_1}{\tan\theta_1 + \tan\theta_2} (r_b-r_m) \\ z = \frac{3 \tan\theta_1 \tan\theta_2}{\tan\theta_1 + \tan\theta_2} (r_b-r_m) \end{cases}$$

(4)当 $\theta_2 = \frac{1}{2}\pi$ 、 $\theta_1 \neq \pm \frac{1}{2}\pi$ 、 $\theta_3 \neq \pm \frac{1}{2}\pi$ 时,有:

$$\begin{cases} x = \frac{\tan\theta_1 - 2 \tan\theta_3}{\tan\theta_1 + \tan\theta_3} (r_b-r_m) \\ y = \frac{-\sqrt{3} \tan\theta_1}{\tan\theta_1 + \tan\theta_3} (r_b-r_m) \\ z = \frac{3 \tan\theta_1 \tan\theta_3}{\tan\theta_1 + \tan\theta_3} (r_b-r_m) \end{cases}$$

(5)当 $\theta_3 = \frac{1}{2}\pi$ 、 $\theta_1 \neq \pm \frac{1}{2}\pi$ 、 $\theta_2 \neq \pm \frac{1}{2}\pi$ 时,有:

$$\begin{cases} x = \frac{\tan\theta_1 - 2 \tan\theta_2}{\tan\theta_1 + \tan\theta_2} (r_b-r_m) \\ y = \frac{-\sqrt{3} \tan\theta_1}{\tan\theta_1 + \tan\theta_2} (r_b-r_m) \\ z = \frac{3 \tan\theta_1 \tan\theta_2}{\tan\theta_1 + \tan\theta_2} (r_b-r_m) \end{cases}$$

5.3 正逆解模型的仿真验证

机构的结构参数选取为: $l = 600\text{mm}$, $r_b = 500\text{mm}$, $r_m = 100\text{mm}$,给定动平台中心点如下的连续空间运动轨迹:

$$\begin{cases} x = 800\cos(0.6\pi t) \\ y = 800\sin(0.6\pi t) \\ z = 1000 - 100t \end{cases} \quad (8)$$

式中, t 为仿真时间, $t = 0 \sim 10\text{s}$ 。

其轨迹曲线如图5所示。

然后利用逆解模型进行解析求解,获得驱动空间轨迹曲线,如图6所示。

最后以逆解模型得到的驱动空间轨迹为驱动输入,利用正解模型进行解析求解,再次获得笛卡尔空间内的动平台中心点轨迹曲线,如图7所示。

图8为正解得到的动平台中心点轨迹与给定的动平台中心点轨迹的对比误差,这是正、逆求解的总误差,误差大小

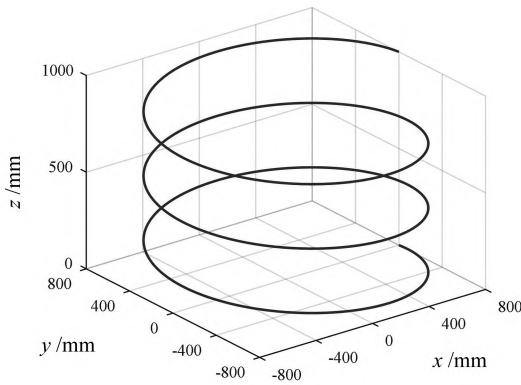


图5 动平台中心点空间轨迹

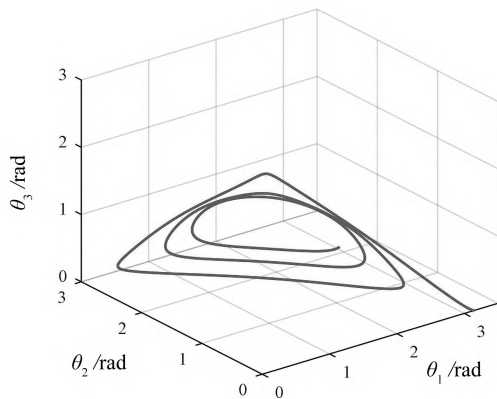


图6 逆向求解得到的驱动空间轨迹

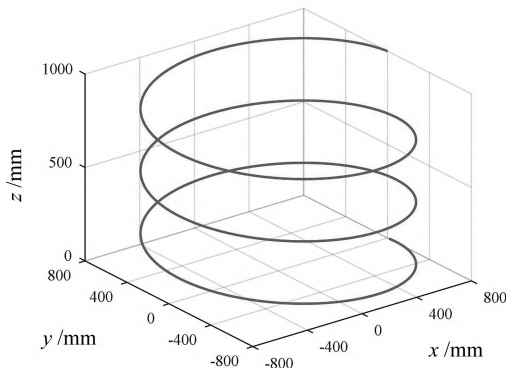


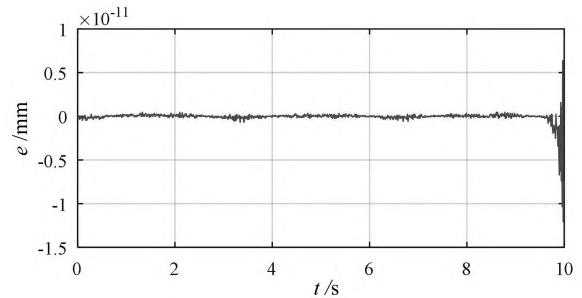
图7 正向求解得到的动平台中心点轨迹

在 1×10^{-10} mm 以内,表明所获得的正、逆解模型是正确的。

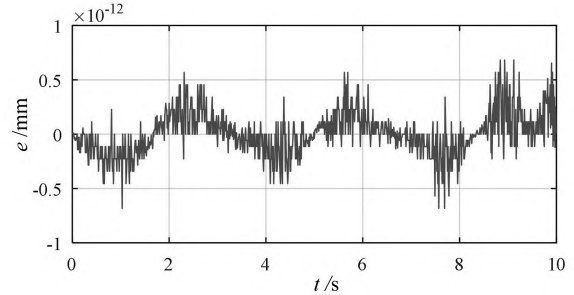
6 结论

本文提出了一种支链全对称的 3-R(4r)(4r)R 型三平移并联机构,分析了该并联机构实现三平移的机构学原理,选取了驱动输入,分析了机构平台奇异、驱动奇异和支链奇异的特性,建立了运动学模型,获得了正、逆解析解,并对正逆解模型进行了仿真验证,得到的具体结论如下:

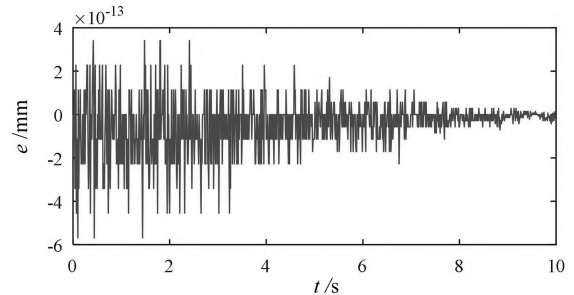
(1) 该机构无平台奇异,通过合理的结构设计,可以避免部分驱动奇异。



(a) 沿 X 轴的误差



(b) 沿 Y 轴的误差



(c) 沿 Z 轴的误差

图8 正、逆求解总误差

(2) 该机构运动学模型简单,且正解唯一,这对机构运动控制的实现极为有利。

参考文献

- [1] 杨玉维,赵新华,雷奶华.3-RRRT 并联机器人位置分析[J].天津理工学院学报,2004,20(3):52-56.
- [2] 李菊,肖思进,沈惠平,等.两支链三平移并联机构动力学分析与性能优化[J].农业机械学报,2022,53(10):412-422.
- [3] 沈惠平,马履中,沈春根,等.3-R//R//R-4r 三平移解耦并联机构位置计算及样机研制[J].机械设计与研究,2004,20(1):16-18.
- [4] 沈惠平,杨廷力,马履中.3-P ⊥ R//4r//R 型三维平移解耦并联机构及其位置分析[J].机械科学与技术,2004,23(12):1414-1417.
- [5] 张纹,施琴.3-RUC 并联机构的运动分析[J].机械传动,2011,35(2):57-59.
- [6] 刘延斌,底复龔.一种新型 3-RRRU 并联机构及其运动学分析[J].中国机械工程,2013,24(4):476-480.
- [7] 李永泉,江洪生,郑天宇,等.基于图谱法的 3 平移并联机构型综合[J].机械工程学报,2021,57(23):34-46.
- [8] 赵一楠,沈惠平,陆晨芳,等.基于 SKC 的新型 3T 并联机构的运动学、奇异性和工作空间分析[J].机械传动,2023,47(7):58-68.
- [9] 张发海,李丽红,朱磊.低耦合度 2PaUU-PPaP 并联机构的运动学分析与多目标优化[J].包装工程,2023,44(13):217-226.
- [10] 黄真.并联机器人机构学理论及控制[M].北京:机械工业出版社,1997.