

文章编号: 1673-3193(2024)01-0036-08

带导数非线性项的耦合 Tricomi 方程组解的破裂

王晓东, 明森, 韩伟, 任翠

(中北大学 数学学院, 山西 太原 030051)

摘要: 在空间维数 $n \geq 2$ 时, 研究带导数非线性项的耦合 Tricomi 方程组的小初值问题。通过定义问题的能量解并构造适当的检验函数, 得到关于解的积分泛函的不等式。根据非线性项指数的范围将解的性态研究分为次临界情形及临界情形。在次临界情形利用改进的 Kato 引理, 在临界情形利用迭代方法, 证明了问题的解会在有限时间破裂。同时, 在次临界情形得到幂次形式解的生命跨度的上界估计, 在临界情形得到指数形式解的生命跨度的上界估计, 推广了现有文献的结论。

关键词: 导数非线性项; 耦合 Tricomi 方程; Kato 引理; 迭代方法; 破裂; 生命跨度

中图分类号: O175.29

文献标识码: A

doi: 10.3969/j.issn.1673-3193.2024.01.005

引用格式: 王晓东, 明森, 韩伟, 等. 带导数非线性项的耦合 Tricomi 方程组解的破裂[J]. 中北大学学报(自然科学版), 2024, 45(1): 36-43.

WANG Xiaodong, MING Sen, HAN Wei, et al. Blow-up of solutions for the coupled system of Tricomi equations with derivative nonlinearity[J]. Journal of North University of China (Natural Science Edition), 2024, 45(1): 36-43.

Blow-Up of Solutions for the Coupled System of Tricomi Equations with Derivative Nonlinearity

WANG Xiaodong, MING Sen, HAN Wei, REN Cui

(School of Mathematics, North University of China, Taiyuan 030051, China)

Abstract: The small initial values problem of coupled Tricomi equations with derivative nonlinearity with space dimensional $n \geq 2$ is studied. By defining the energy solutions of the problem and constructing the adequate test function, the integral functional inequalities of solutions are obtained. According to the range of nonlinearities exponents, the research process is divided into the sub-critical case and critical cases. By using the improved Kato's lemma in the sub-critical case and iterative method in the critical case, it shows that solutions to the problem blow up in finite time. Meanwhile, the upper bound lifespan estimates in power form for the sub-critical case and exponential form for the critical case are obtained, which generalizes the conclusions of existing literatures.

Key words: derivative nonlinearity; coupled Tricomi equations; Kato's lemma; iteration method; blow-up; lifespan

收稿日期: 2022-12-14

基金项目: 山西省基础研究计划资助项目(20210302123045, 20210302123021, 20210302123182); 中北大学科研创新团队支持计划资助项目(TD201901); 山西省高等学校优秀青年学术带头人支持计划资助项目

作者简介: 王晓东(1998-), 男, 硕士生, 主要从事偏微分方程的研究。

通信作者: 明森(1987-), 男, 副教授, 博士, 主要从事偏微分方程的研究。E-mail: senming1987@163.com。

0 引言

本文研究了带导数非线性项(即方程解的导

$$\begin{cases} u_{tt} - t^{2m} \Delta u = |v_t|^p, & (x, t) \in \mathbf{R}^n \times [0, \infty), \\ v_{tt} - t^{2m} \Delta v = |u_t|^q, & (x, t) \in \mathbf{R}^n \times [0, \infty), \\ u(x, 0) = \varepsilon f_1(x), v(x, 0) = \varepsilon f_2(x), & x \in \mathbf{R}^n, \\ u_t(x, 0) = \varepsilon g_1(x), v_t(x, 0) = \varepsilon g_2(x), & x \in \mathbf{R}^n, \end{cases} \quad (1)$$

式中: 空间维数 $n \geq 2$; $m \geq 0$; $p, q > 1$; ε 是给定的任意小的正数; 非负初值函数 $(f_1, f_2, g_1, g_2) \not\equiv 0$, 且 $\text{supp}(f_1, f_2, g_1, g_2) \subset B_E(0) = \{x | |x| \leq E\}$, $E > 2$.

Tricomi 方程及耦合方程组解的破裂问题已受到广泛关注^[1-11]。不同形式非线性项的影响强弱不同, 会导致解的破裂区域不同, 并且具有不同的生命跨度估计。关于 n 维空间中的非线性 Tricomi 方程 $u_{tt} - t^{2m} \Delta u = a|u|^p + b|u_t|^q$, 当 $(a, b) = (1, 0)$ 时, 记 $p_c(n, m)$ 为二次方程 $((m+1)n-1)p^2 - ((m+1)n+1-2m)p - 2(m+1) = 0$ 的最大根。He 等^[1]在 $1 < p \leq p_c(n, m)$ 时证明了其初值问题解的破裂。当 $(a, b) = (0, 1)$, $1 < q \leq$

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \frac{\mu_1}{1+t} u_t = |v_t|^p, & (x, t) \in \mathbf{R}^n \times [0, \infty), \\ v_{tt} - \Delta v + \frac{\mu_2}{1+t} v_t = |u_t|^q, & (x, t) \in \mathbf{R}^n \times [0, \infty), \\ u(x, 0) = \varepsilon f_1(x), v(x, 0) = \varepsilon f_2(x), & x \in \mathbf{R}^n, \\ u_t(x, 0) = \varepsilon g_1(x), v_t(x, 0) = \varepsilon g_2(x), & x \in \mathbf{R}^n, \end{cases} \quad (2)$$

当 $\mu_1 = \mu_2 = 0$ 时, 方程(2)即为经典波动方程的耦合方程组。此耦合系统的临界指数记为 $\Omega(n, p, q) := \max(\Lambda(n, p, q), \Lambda(n, q, p))$, 其中

$$\Lambda(n, p, q) = \frac{p+1}{pq-1} - \frac{n-1}{2}. \quad (3)$$

Deng^[12] 和 Xu^[13] 在 $\Omega(n, p, q) \geq 0$ 时得到问题(2)解的破裂。当 $\Omega(n, p, q) < 0$ 时, Kubo 等^[14]证明了问题(2)存在整体解。关于解的破裂区域及整体存在区域的临界曲线为 $\Omega(n, p, q) = 0$ 。

$\mu_1, \mu_2 > 0$ 时, 对于带阻尼项的波动方程的耦合系统(2), 当 $\Omega(n, \mu_1, \mu_2, p, q) = \max(\Lambda(n + \mu_1, p, q), \Lambda(n + \mu_2, q, p)) \geq 0$ 时, Hamouda 等^[15]利用检验函数方法, 证明了问题解的破裂, 其中

$$\Lambda(n + \mu_1, p, q) = \frac{p+1}{pq-1} - \frac{n + \mu_1 - 1}{2}.$$

数形式)的 Tricomi 方程的耦合系统, 方程以时间 t 的多项式型传播速度为特征, 同时考虑了其小初值问题, 即

$q_G(n(m+1))$ 时, Lucente 等^[3]利用积分表示公式, Hamouda 等^[4]通过构造常微分不等式, 证明了其小初值问题解的破裂, 其中, $q_G(n) = 1 + 2/(n-1)$ 是 Glassey 临界指数。同时, 当 $1 < q \leq q_c(n, m)$ 时, 利用 Bessel 函数^[6]构造适当的检验函数, 得到了改进的破裂结果, 其中 $q_c(n, m) = 1 + 2/((m+1)(n-1)-m) \geq q_G(n(m+1))$ ^[4-5]。当 $(a, b) = (1, 1)$ 时, Hamouda 等^[4]证明了带组合非线性项的 Tricomi 方程小初值问题解的破裂。其它有关 Tricomi 方程及其耦合方程组的研究, 可参考相关文献^[7-11]。

对于带尺度不变阻尼项的波动方程的耦合系统

并且可知, 当 $\mu_1 = \mu_2 = 0$ 时, $\Omega(n, \mu_1, \mu_2, p, q)$ 转化为 $\Omega(n, p, q)$ 。另一方面, 将阻尼项系数替换为连续可积的非负函数 $b_i(t)$ ($i = 1, 2$) 时, Palmieri 等通过构造适当的检验函数, 并利用改进的 Kato 引理及迭代方法, 得到问题(2)解的破裂及生命跨度的上界估计^[16]。其它相关研究见文献^[17-19]。

对于 Tricomi 方程, 波的传播速度依赖于时间 t 。问题(1)关于时间 t 作变换, 得

$$\xi(t) = \frac{t^{m+1}}{m+1}, \quad (4)$$

则波具有有限传播速度, 即 $\{x | |x| \leq \xi(t) + E\}$ 。

下面给出能量空间中问题(1)的弱解定义。

定义 1 函数 (u, v) 是问题(1)在 $[0, T)$ 上的能量解, 若

$$\begin{cases} u, v \in C([0, T), H^1(\mathbf{R}^n)) \cap C^1([0, T), L^2(\mathbf{R}^n)), \\ u_t \in L_{\text{loc}}^q((0, T) \times \mathbf{R}^n), v_t \in L_{\text{loc}}^p((0, T) \times \mathbf{R}^n), \end{cases}$$

并且, 对于 $\forall \Phi, \tilde{\Phi} \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n \times [0, T))$, 方程(5) 和(6)成立, 即

$$\int_{\mathbf{R}^n} u_t(x, t) \Phi(x, t) dx - \int_{\mathbf{R}^n} u_t(x, 0) \Phi(x, 0) dx - \int_0^t \int_{\mathbf{R}^n} u_t(x, s) \Phi_t(x, s) dx ds + \int_0^t \int_{\mathbf{R}^n} s^{2m} \nabla u(x, s) \nabla \Phi(x, s) dx ds = \int_0^t \int_{\mathbf{R}^n} |v_t|^p \Phi(x, s) dx ds, \quad (5)$$

$$\int_{\mathbf{R}^n} v_t(x, t) \tilde{\Phi}(x, t) dx - \int_{\mathbf{R}^n} v_t(x, 0) \tilde{\Phi}(x, 0) dx - \int_0^t \int_{\mathbf{R}^n} v_t(x, s) \tilde{\Phi}_t(x, s) dx ds + \int_0^t \int_{\mathbf{R}^n} s^{2m} \nabla v(x, s) \nabla \tilde{\Phi}(x, s) dx ds = \int_0^t \int_{\mathbf{R}^n} |u_t|^q \tilde{\Phi}(x, s) dx ds. \quad (6)$$

关于问题(1)的解 (u, v) , 有如下定理。

定理2 令 $p, q > 1, m \geq 0, n \geq 2$, 且满足

$\Omega(n, m, p, q) := \max(\Lambda(n, m, p, q), \Lambda(n, m, q, p))$, 其中,

$$\Lambda(n, m, p, q) = \frac{p+1}{pq-1} + \frac{m-(n-1)(m+1)}{2}.$$

假设 $f_i, g_i (i=1, 2)$ 是紧支集位于 $B_E(0)$ 且不恒为0的非负函数, 满足 $(f_i, g_i) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n) \times (H^1(\mathbf{R}^n), L^2(\mathbf{R}^n))$ 。若 (u, v) 是方程(5)和(6)的能量解, 且满足 $\text{supp} \subset \{(x, t) \in \mathbf{R}^n \times [0, \infty) \mid |x| \leq \xi(t) + E\}$, 则存在正常数 $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(n, m, p, q, f_1, f_2, g_1, g_2, E)$ 。当 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ 时, (u, v) 的生命跨度估计 $T(\varepsilon)$ 满足

$$T(\varepsilon) \leq \begin{cases} C\varepsilon^{-\Omega(n, m, p, q)^{-1}}, & \Omega(n, m, p, q) > 0, \\ \exp(C\varepsilon^{-(pq-1)}), & \Omega(n, m, p, q) = 0, p \neq q, \\ \exp(C\varepsilon^{-(p-1)}), & \Omega(n, m, p, q) = 0, p = q, \end{cases} \quad (7)$$

其中, C 是与 ε 无关的正常数。

本文将Lai等^[5]研究的单个Tricomi方程的小初值问题推广为耦合方程组的小初值问题(1), 并利用检验函数方法在次临界情形及临界情形得到解的破裂, 其破裂区域为 $\Omega(n, m, p, q) \geq 0$ 。当 $p=q$ 时, 问题(1)解的生命跨度估计与文献^[5]中的生命跨度估计相同。当 $m=0$ 时, $\Omega(n, m, p, q)$ 转化为 $\Omega(n, p, q)$, 问题(1)解的破裂区域与式(7)中的生命跨度估计和Deng^[12]及Xu^[13]得到的波动方程耦合方程组的结果一致。

1 预备知识

假设函数 $\rho_i(t) (i=1, 2)$ 满足

$$\frac{d^2}{dt^2} \rho_i(t) - t^{2m} \rho_i(t) = 0, \forall t \geq 0, i=1, 2, \quad (8)$$

则 $\rho_i(t)$ 可表示为

$$\rho_i(t) = \begin{cases} 1, & t=0, \\ \alpha_m t^{1/2} K_{(2m+2)^{-1}}(\xi(t)), & \forall t > 0, \end{cases} \quad (9)$$

式中: $\xi(t)$ 由式(4)定义。 $\alpha_m, K_v(t)$ 及 $\rho_i(t)$ 的相关性质详见文献^[1, 4, 6]。

基于文献^[17]来定义函数 $\varphi(x) = \int_{S^{n-1}} e^{x \cdot \omega} d\omega (n \geq 2, S^{n-1}$ 表示 $n-1$ 维单位球面), 则 $\varphi(x)$ 满足 $\Delta \varphi = \varphi$ 。定义函数 $\phi_i(x, t) = \rho_i(t) \varphi(x) (i=1, 2)$ 。因此, $\phi_i(x, t)$ 满足微分方程 $\frac{d^2}{dt^2} \phi_i(x, t) - t^{2m} \Delta \phi_i(x, t) = 0, i=1, 2$ 。 (10)

对于 $\phi_i(x, t)$, 有如下引理成立。

引理1^[17] 令 $r > 1$, 则存在正常数 $C_1^1 = C_1^1(n, E, p, r)$ 及 $C_1^2 = C_1^2(n, E, q, r)$, 使得

$$\int_{\{|x| \leq \xi(t) + E\}} (\phi_i(x, t))^r dx \leq C_1^i \rho_i^r(t) e^{r\xi(t)} (1 + \xi(t))^{\frac{(2-r)(n-1)}{2}}, \forall t \geq 0, i=1, 2. \quad (11)$$

现定义函数

$$G_1(t) = \int_{\mathbf{R}^n} u(x, t) \phi_1(x, t) dx,$$

$$G_2(t) = \int_{\mathbf{R}^n} v(x, t) \phi_2(x, t) dx,$$

$$\tilde{G}_1(t) = \int_{\mathbf{R}^n} u_t(x, t) \phi_1(x, t) dx,$$

$$\tilde{G}_2(t) = \int_{\mathbf{R}^n} v_t(x, t) \phi_2(x, t) dx.$$

下面分别给出 $G_i(t)$ 和 $\tilde{G}_i(t) (i=1, 2)$ 下界估计的引理。

引理2^[4] 假设定理2中关于 $f_i, g_i (i=1, 2)$ 的条件成立, (u, v) 是方程(5)和(6)的能量解, 则 $\exists T_0 = T_0(m) > 1$, 使得

$$G_i(t) \geq C_{G_i} \varepsilon t^{-m}, \forall t \geq T_0, i=1, 2, \quad (12)$$

其中, C_{G_i} 是与 n, m, f_i, g_i, E 有关的正常数。

引理3^[4] 假设定理2中关于 $f_i, g_i (i=1, 2)$ 的条件成立, (u, v) 是方程(5)和(6)的能量解, 则 $\exists T_1 = T_1(m) > 1$, 使得

$$\tilde{G}_i(t) \geq C_{\tilde{G}_i} \varepsilon, \forall t \geq T_1, i=1, 2, \quad (13)$$

其中, $C_{\tilde{G}_i}$ 是与 n, m, f_i, g_i, E 有关的正常数。

由于 $\rho_i(t), \psi_i(x, t)$ 所满足的方程(8)和(10)与文献[4]中的一致, 故引理的证明方法也与其一致, 类似可得到如下结果。

1) 由于 $\lim_{t \rightarrow \infty} K_v(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2t}} e^{-t}(1 + O(t^{-1}))$, 当式(12)中的 T_0 充分大时, 可知^[4,6]

$$\xi(t) K_{\frac{1}{2m+2}}(\xi(t)) > \frac{\pi}{4} e^{-2\xi(t)}, \xi^{-1}(t) K_{\frac{-2}{2m+2}}(\xi(t)) > \frac{1}{\pi} e^{2\xi(t)}, \forall t \geq \frac{T_0}{2}. \quad (14)$$

2) 类似于文献[4]中引理 3.3 的证明过程, 得

$$\begin{aligned} \tilde{G}_i'(t) - \frac{3\rho_i'(t)}{2\rho_i(t)} \tilde{G}_i(t) &\geq \\ \frac{t^m}{4} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} |v_i(x, t)|^p \psi_i(x, s) dx ds + \\ \int_{\mathbb{R}^n} |v_i(x, t)|^p \psi_i(x, t) dx + \frac{C_m(f_i, g_i)}{4} \varepsilon t^m, i=1. \end{aligned} \quad (15)$$

当 $i=2$ 时, 式(15)中用 u 替换 v , 用 q 替换 p 即可。此处, $C_m(f_i, g_i)$ ($i=1, 2$) 为正常数。

2 定理 2 的证明

令

$$\begin{aligned} \Gamma_i(t) &= -2\rho_i'(t)/\rho_i(t), i=1, 2, \\ L_1(t) &= \frac{1}{8} \int_{T_2}^t \int_{\mathbb{R}^n} |v_t(x, s)|^p \psi_1(x, s) dx ds + \frac{C_3 \varepsilon}{8}, \\ L_2(t) &= \frac{1}{8} \int_{T_2}^t \int_{\mathbb{R}^n} |u_t(x, s)|^q \psi_2(x, s) dx ds + \frac{C_3 \varepsilon}{8}, \end{aligned} \quad (16)$$

(17)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |v_t(x, t)|^p \psi_1(x, t) dx &\geq \left(\int_{\{|x| \leq \xi(t)+R\}} \phi_2^{\frac{p}{p-1}}(x, t) \phi_1^{-\frac{1}{p-1}}(x, t) dx \right)^{-(p-1)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} v_t(x, t) \phi_2(x, t) dx \right)^p \geq \\ C \rho_1(t) \rho_2^{-p}(t) e^{-(p-1)\xi(t)} (1 + \xi(t))^{-\frac{(n-1)(p-1)}{2}} \tilde{G}_2^p(t). \end{aligned} \quad (20)$$

由式(9)和式(14), 可知

$$\begin{aligned} \rho_1(t) e^{\xi(t)} &> \frac{\sqrt{\pi(m+1)}}{2} \alpha_m t^{-\frac{m}{2}}, \rho_2^{-p}(t) e^{-p\xi(t)} > \\ (\pi(m+1) \alpha_m^2)^{-\frac{p}{2}} t^{\frac{mp}{2}}. \end{aligned} \quad (21)$$

将式(21)代入式(20), 得

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |v_t(x, t)|^p \psi_1(x, t) dx &\geq \\ C t^{\frac{m(p-1)}{2}} (1 + \xi(t))^{-\frac{(n-1)(p-1)}{2}} \tilde{G}_2^p(t). \end{aligned} \quad (22)$$

式中: $C_3 = \min(C_m(f_1, g_1)/4, C_m(f_2, g_2)/4, 8C_{\tilde{G}_1}, 8C_{\tilde{G}_2})$ 。利用 $\rho(t)$ 及 $\Gamma(t)$ 的性质^[4,6], 得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\rho_i'(t)}{t^m \rho_i(t)} = -1, \text{ 并且可选取 } T_2 > T_1, \text{ 使得}$$

$$\frac{t^m}{4} - \frac{3\Gamma_i(t)}{32} > 0, \forall t \geq T_2.$$

令 $F_i(t) = \tilde{G}_i(t) - L_i(t), i=1, 2$ 。利用式(15)可知

$$\begin{aligned} F_1'(t) + \frac{3\Gamma_1(t)}{4} F_1(t) &\geq \\ \left(\frac{t^m}{4} - \frac{3\Gamma_1(t)}{32} \right) \int_{T_2}^t \int_{\mathbb{R}^n} |v_t(x, s)|^p \psi_1(x, s) dx ds + \\ \frac{7}{8} \int_{\mathbb{R}^n} |v_t(x, t)|^p \psi_1(x, t) dx + \forall t \geq T_2. \end{aligned} \quad (18)$$

式(18)两边乘以 $\rho_1^{-3/2}(t)$, 并在 (T_2, t) 上积分, 得到

$$F_1(t) \geq F_1(T_2) \frac{\rho_1^{3/2}(t)}{\rho_1^{3/2}(T_2)}, \forall t \geq T_2.$$

由于 $C_3 \leq 8C_{\tilde{G}_1}$, 结合引理 3, 可知

$$\begin{aligned} F_1(T_2) = \tilde{G}_1(T_2) - \frac{C_3 \varepsilon}{8} &\geq \tilde{G}_1(T_2) - \\ C_{\tilde{G}_1} \varepsilon &\geq 0, \forall t \geq T_2, \end{aligned}$$

故 $F_1(t) \geq 0$ 。于是

$$\tilde{G}_1(t) \geq L_1(t), \forall t \geq T_2.$$

类似地, 有

$$\tilde{G}_2(t) \geq L_2(t), \forall t \geq T_2. \quad (19)$$

利用 Hölder 不等式及式(11), 可得

$$\begin{aligned} L_1'(t) &\geq C t^{\frac{m(p-1)}{2}} (1 + \xi(t))^{-\frac{(n-1)(p-1)}{2}} L_2^p(t). \end{aligned} \quad (23)$$

类似地, 可知

$$L_2'(t) \geq C t^{\frac{m(q-1)}{2}} (1 + \xi(t))^{-\frac{(n-1)(q-1)}{2}} L_1^q(t). \quad (24)$$

将式(23)和式(24)在 (T_2, t) 上积分, 得到

$$\begin{aligned} L_1(t) &\geq C_0 \int_{T_2}^t s^{\frac{m(p-1)}{2}} (1 + \xi(s))^{-\frac{(n-1)(p-1)}{2}} \cdot \\ L_2^p(s) ds &+ \frac{C_3 \varepsilon}{8}, \forall t \geq T_2, \end{aligned} \quad (25)$$

$$L_2(t) \geq C_0 \int_{T_2}^t s^{\frac{m(q-1)}{2}} (1 + \xi(s))^{-\frac{(n-1)(q-1)}{2}} \cdot L_1^q(s) ds + \frac{C_3 \epsilon}{8}, \forall t \geq T_2. \quad (26)$$

2.1 次临界情形

下面给出改进的Kato引理。

引理 4 令 $r > 1$, $a > 0$, $b > 0$, 使得 $M = \frac{r-1}{2}a - \frac{b}{2} + 1 > 0$ 。假设 $F(t) \in C^2([H, T])$, $H > 0$, 并满足

$$F(t) \geq At^a, t \geq \tilde{T}_0, \quad (27)$$

$$F''(t) \geq B(t+E)^{-b} |F(t)|^r, t \geq H, \quad (28)$$

$$F(H) \geq 0, F'(H) > 0, \quad (29)$$

式中: $A, B, R, \tilde{T}_0$ 是正常数。假设

$$\tilde{T}_1 = \max\left(\tilde{T}_0, H + \frac{F(H)}{F'(H)}, E\right) \geq C_0 A^{-\frac{r-1}{2M}}, \quad (30)$$

则 $T < 2^{2M} \tilde{T}_1$ 。

引理 4 的证明 由于引理 4 中 $H \neq 0$, 此处结合文献 [18] 给出证明过程。利用式 (28) 和式 (29), 可知 $F'(t) \geq F'(H) > 0$, 则

$$F(t) \geq F'(H)(t-H) + F(H) \geq F(H) \geq 0, \quad \forall t \geq H. \quad (31)$$

式 (28) 两边同时乘以 $F'(t)$, 得

$$\partial_t (F'(t))^2 \geq 2B(t+E)^{-b} F^r(t) F'(t).$$

利用式 (31), 可知

$$\begin{aligned} (F'(t))^2 &\geq \\ (F'(H))^2 + 2B(t+E)^{-b} \int_H^t F^r(s) F'(s) ds &\geq \\ \frac{2B}{r+1} (t+E)^{-b} F^r(t) (F(t)-F(H)), &\forall t \geq H. \end{aligned}$$

若 $F(H) > 0$, 假设 $t \geq H + F(H)/F'(H)$, 则有 $F(t) \geq 2F(H)$, 得

$$\begin{aligned} F'(t) &> \sqrt{\frac{B}{r+1}} (t+E)^{-\frac{b}{2}} F^{\frac{r+1}{2}}(t), \\ \forall t &\geq H + \frac{F(H)}{F'(H)}. \end{aligned} \quad (32)$$

若 $F(H) = 0$, 式 (32) 仍成立。其余部分的证明与文献 [18] 中相同。

现证明当 $\Omega(n, m, p, q) > 0$ 时, 次临界情形问题 (5)~(6) 解的破裂。为不失一般性, 假设 $\Omega(n, m, p, q) = \Lambda(n, m, p, q)$ 。对于式 (25) 和式 (26), $\exists T_3 > T_2 + 1$, 使得当 $t \geq T_3$ 时, 有

$$\begin{aligned} 1 + \xi(t) &\leq (1+t)^{m+1}, t^{\frac{m(q-1)}{2}} \geq \\ C(1+t)^{\frac{m(q-1)}{2}}, t^{\frac{m(p-1)}{2}} &\geq C(1+t)^{\frac{m(p-1)}{2}}. \end{aligned} \quad (33)$$

结合式 (25), 式 (26) 及式 (33), 可知

$$\begin{aligned} L_1(t) &\geq \\ C_0 \int_{T_3}^t (1+s)^{\frac{m(p-1)}{2} - \frac{(n-1)(p-1)}{2}(m+1)} L_2^p(s) ds + \\ \frac{C_3 \epsilon}{8}, &\forall t \geq T_3, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} L_2(t) &\geq \\ C_0 \int_{T_3}^t (1+s)^{\frac{m(q-1)}{2} - \frac{(n-1)(q-1)}{2}(m+1)} L_1^q(s) ds + \\ \frac{C_3 \epsilon}{8}, &\forall t \geq T_3. \end{aligned} \quad (35)$$

对式 (35) 运用 Hölder 不等式, 并注意到 $n \geq 2$, 可得

$$\begin{aligned} L_2(t) &\geq \\ C(1+t)^{\frac{m(q-1)}{2} - \frac{(n-1)(q-1)}{2}(m+1)} \int_{T_3}^t L_1^q(s) ds &\geq \\ C(1+t)^{\frac{m(q-1)}{2} - \frac{(n-1)(q-1)}{2}(m+1)-(q-1)} \left(\int_{T_3}^t L_1(s) ds \right)^q, \\ \forall t &\geq T_3. \end{aligned} \quad (36)$$

令

$$F_i(t) = \int_{T_3}^t L_i(s) ds, i = 1, 2. \quad (37)$$

将式 (36) 代入式 (23), 可得

$$\begin{aligned} F_1''(t) &\geq \\ C(1+t)^{\frac{pq-1}{2}(m-(n-1)(m+1)-p(q-1))} F_1^{pq}(t), &\forall t \geq T_3. \end{aligned} \quad (38)$$

另一方面, 可知 $F_1(T_3) = 0$, $F_1'(T_3) = L_1(T_3) > 0$ 。由于 $L_1(t)$ 递增, 利用式 (37) 可知 $F_1(t) \geq (t-T_3)L_1(T_3)$ 。当 $t \geq 2T_3$ 时, 有

$$F_1(t) \geq 2^{-1} t L_1(T_3) \geq C \epsilon t, \forall t \geq 2T_3. \quad (39)$$

根据引理 4 及式 (38) 和 (39), 令

$$A = C \epsilon, a = 1, b = \frac{pq-1}{2}((n-1)(m+1)-m)+p(q-1), r = pq.$$

可知

$$\begin{aligned} M &= \frac{pq-1}{2} - \frac{pq-1}{4}((n-1)(m+1)-m) - \\ \frac{p(q-1)}{2} + 1 &> 0 \Leftrightarrow \Lambda(n, m, p, q) = \frac{p+1}{pq-1} + \\ \frac{m-(n-1)(m+1)}{2} &> 0. \end{aligned} \quad (40)$$

根据式 (39), 取 $\tilde{T}_0 = (C \epsilon)^{-\Lambda(n, m, p, q)^{-1}}$, 则存在

充分小的正数 ε_0 , 当 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ 时, 有

$$\tilde{T}_0 \geq \max \left(T_3 + \frac{F_1(T_3)}{F_1'(T_3)}, E \right).$$

根据引理 4, $F_1(t)$ 生命跨度的上界估计满足

$$T \leq C\varepsilon^{-\Lambda(n, m, p, q)^{-1}}.$$

类似地, 当 $\Omega(n, m, p, q) = \Lambda(n, m, q, p)$ 时,

对于 $F_2(t)$, 有

$$T \leq C\varepsilon^{-\Lambda(n, m, q, p)^{-1}},$$

则问题(1)的解 (u, v) 的生命跨度的上界估计为

$$T \leq C\varepsilon^{-\max(\Lambda(n, m, p, q), \Lambda(n, m, q, p))^{-1}},$$

式中: $C = C(n, m, p, q, f_1, f_2, g_1, g_2, E)$.

2.2 临界情形且 $p \neq q$

假设 $\Omega(n, m, p, q) = 0$, 设 $\Lambda(n, m, p, q) = 0 > \Lambda(n, m, q, p)$. 利用式(40)及 $T_3 > 1$, 则

$$\begin{aligned} L_2(t) &\geq C_0 D_j^q \int_{l_j T_3}^t (T_3 + s)^{-\frac{(q-1)(p+1)}{pq-1}} \left(\log \left(\frac{s}{l_j T_3} \right) \right)^{q\theta_j} ds \geq C_0 D_j^q (t + T_3)^{-\frac{(q-1)(p+1)}{pq-1}} \int_{\frac{l_j t}{l_{j+1}}}^t \left(\log \left(\frac{s}{l_j T_3} \right) \right)^{q\theta_j} ds \geq \\ &\frac{3}{5} C_0 D_j^q \left(1 - \frac{l_j}{l_{j+1}} \right) (t + T_3)^{1 - \frac{(q-1)(p+1)}{pq-1}} \left(\log \left(\frac{t}{l_{j+1} T_3} \right) \right)^{q\theta_j}, \quad \forall t \geq l_{j+1} T_3. \end{aligned} \quad (44)$$

将式(44)代入式(41), 得

$$L_1(t) \geq \left(\frac{3}{5} \right)^p C_0^{p+1} D_j^{pq} \left(1 - \frac{l_j}{l_{j+1}} \right)^p \int_{l_{j+1} T_3}^t \frac{1}{s + T_3} \cdot$$

$$\left(\log \left(\frac{s}{l_{j+1} T_3} \right) \right)^{pq\theta_j} ds \geq C_4 C_0^{p+1} \left(1 - \frac{l_j}{l_{j+1}} \right)^p \cdot$$

$$D_j^{pq} (pq\theta_j + 1)^{-1} \left(\log \left(\frac{t}{l_{j+1} T_3} \right) \right)^{pq\theta_j + 1}, \quad \forall t \geq l_{j+1} T_3,$$

其中, $C_4 = 3^{p+1}/5^{p+1}$. 由于 $1 - l_j/l_{j+1} \geq 2^{-(j+3)}$,

于是, $L_1(t)$ 满足

$$L_1(t) \geq C_4 C_0^{p+1} 2^{-p(j+3)} (pq\theta_j + 1)^{-1} \cdot$$

$$D_j^{pq} \left(\log \left(\frac{t}{l_{j+1} T_3} \right) \right)^{pq\theta_j + 1}.$$

$$\begin{aligned} \log D_j &\geq pq \log D_{j-1} - j \log(2^p pq) + \log \tilde{D} \geq (pq)^j \log D_0 - \left(\sum_{k=0}^{j-1} (j-k) (pq)^k \right) \log(2^p pq) + \\ &(pq)^j \left(\log D_0 - \frac{pq}{(pq-1)^2} \log(2^p pq) + \frac{1}{pq-1} \log \tilde{D} \right) + \\ &\underbrace{\frac{1}{(pq-1)^2} \log(2^p pq) + \frac{j+1}{pq-1} \log(2^p pq) - \frac{1}{pq-1} \log \tilde{D}}_{\geq 0}. \end{aligned} \quad (48)$$

令式(48)最后一步的后 3 项之和非负, 则 j 应满足

式(34)和(35)可写为

$$\begin{aligned} L_1(t) &\geq C_0 \int_{T_3}^t (T_3 + s)^{-\frac{(p-1)(p+1)}{pq-1}} L_2^p(s) ds + \frac{C_3 \varepsilon}{8}, \\ \forall t &\geq T_3, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} L_2(t) &\geq C_0 \int_{T_3}^t (T_3 + s)^{-\frac{(q-1)(p+1)}{pq-1}} L_1^q(s) ds + \frac{C_3 \varepsilon}{8}, \\ \forall t &\geq T_{30}. \end{aligned} \quad (42)$$

引入序列 $\{l_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, 其中 $l_j = 2 - 2^{-(j+1)}$. 可知 $\{l_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ 是递增序列, $l_j \geq l_0 = 3/2$. 假设

$$L_1(t) \geq D_j \left(\log \left(\frac{t}{l_j T_3} \right) \right)^{\theta_j}, \quad t \geq l_j, \quad (43)$$

其中, $\{D_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, $\{\theta_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ 是待定非负实数序列. 由于 $D_0 = C_3 \varepsilon / 8$, $\theta_0 = 0$, 则 $j=0$ 时式(43)成立.

另一方面, 对于 $\forall j \in \mathbb{N}$, 当 $t \geq l_j T_3$ 时, $t \geq 3(t + T_3)/5$. 将式(43)代入式(42), 得

结合式(43), 令

$$\theta_{j+1} = 1 + pq\theta_j, \quad (45)$$

$$D_{j+1} = 2^{-p(j+3)} C_4 C_0^{p+1} (pq\theta_j + 1)^{-1} D_j^{pq}. \quad (46)$$

于是, 式(43)对于 $j+1$ 也成立.

根据式(45), 得

$$\begin{aligned} \theta_j &= 1 + pq\theta_{j-1} = 1 + pq + (pq)^2 \theta_{j-2} = \cdots = \\ &(pq)^k + \theta_0 (pq)^j = \frac{(pq)^j - 1}{pq - 1}. \end{aligned} \quad (47)$$

结合式(46)和(47), 得

$$\begin{aligned} D_j &\geq 2^{-p(j+3)} C_4 C_0^{p+1} (pq - 1)^{-j} (pq)^{-j} D_{j-1}^{pq} = \\ &\underbrace{2^{-3p} C_4 C_0^{p+1} (pq - 1)}_{\tilde{D}} (2^p pq)^{-j} D_{j-1}^{pq}. \end{aligned}$$

计算得到

$$j \geq j_0 := \frac{\log \tilde{D}}{\log(2^p pq)} - \frac{pq}{pq - 1}.$$

选取 j 使得 $j \geq \max(0, j_0)$, 则有

$$\log D_j \geq (pq)^j \log(C_5 \epsilon), \quad (49)$$

式中: $C_5 = \log(8^{-1} C_3 \tilde{D}^{(pq-1)^{-1}} (2^p pq)^{-pq(pq-1)^{-2}})$ 。

结合式(43), 式(47)及式(49), 当 $j \geq \max(0, j_0)$ 且 $t \geq l_j T_3$ 时, 有

$$L_1(t) > \exp((pq)^j \log(C_5 \epsilon)) \left(\log \left(\frac{t}{2T_3} \right) \right)^{((pq)^j - 1)/(pq - 1)} = \exp \left((pq)^j \log \left(C_5 \epsilon \left(\log \left(\frac{t}{2T_3} \right) \right)^{1/(pq-1)} \right) \right) \log \left(\frac{t}{2T_3} \right)^{-1/(pq-1)}. \quad (50)$$

选取充分小的正数 $\epsilon_0 = \epsilon_0(n, m, f_1, f_2, g_1, g_2, E)$, 使得 $\exp((C_5 \epsilon_0)^{-(pq-1)}) \geq 0$ 。因此, 对于 $\forall \epsilon \in (0, \epsilon_0)$ 及 $t \geq 2T_3 \exp((C_5 \epsilon)^{-(pq-1)})$, 得

$$C_5 \epsilon \left(\log \left(\frac{t}{2T_3} \right) \right)^{1/(pq-1)} > 1。$$

式(50)中当 $j \rightarrow \infty$ 时, $L_1(t)$ 会在有限时间内发生破裂。因此, 问题(1)的解 (u, v) 的生命跨度的上界估计为

$$T(\epsilon) \leq \exp(C \epsilon^{-(pq-1)}), \quad (51)$$

其中, C 是与 ϵ 无关的正常数。

当 $\Lambda(n, m, q, p) = 0 > \Lambda(n, m, p, q)$ 时, 利用类似方法可得与式(51)相同的估计。

2.3 临界情形且 $p = q$

假设 $\Lambda(n, m, p, q) = \Lambda(n, m, q, p) = 0$, 利用式(40), 则有 $p = q$ 。因此, 式(34)和(35)可记为

$$L_1(t) \geq C_0 \int_{T_3}^t (1+s)^{-1} L_2^b(s) ds + \frac{C_3 \epsilon}{8}, \forall t \geq T_3, \quad (52)$$

$$L_2(t) \geq C_0 \int_{T_3}^t (1+s)^{-1} L_1^q(s) ds + \frac{C_3 \epsilon}{8}, \forall t \geq T_3。 \quad (53)$$

结合文献[19]中对式(42)和式(43)的计算过程, 对于式(52)和(53), 可知 $L_1(t)$ 和 $L_2(t)$ 会在有限时间内破裂, 则问题(1)的解 (u, v) 的生命跨度的上界估计为

$$T(\epsilon) \leq \exp(C \epsilon^{-(p-1)}),$$

其中, C 是与 ϵ 无关的正常数。

参考文献:

[1] HE D Y, WITT I, YIN H C. On the global solution

problem for semilinear generalized Tricomi equations, I [J]. Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 2017, 56(2): 1-24.

[2] LIN J Y, TU Z H. Lifespan of semilinear generalized Tricomi equation with Strauss type exponent [J]. 2019, arXiv: 1903.11351v2.

[3] LUCENTE S, PALMIERI A. A blow-up result for a generalized Tricomi equation with nonlinearity of derivative type [J]. Milan Journal of Mathematics, 2021, 89(4): 1-13.

[4] HAMOUDA M, HAMZA M A. Blow-up and lifespan estimate for the generalized Tricomi equation with mixed nonlinearities [J]. Advances in Pure and Applied Mathematics, 2021, 12: 54-70.

[5] LAI N A, SCHIAVONE N M. Blow-up and lifespan estimate for generalized Tricomi equations related to Glassey conjecture [J]. Mathematische Zeitschrift, 2022, 301(3): 3369-3393.

[6] GAUNT R E. Inequalities for modified bessel functions and their integrals [J]. Mathematical Analysis and Applications, 2014, 420(1): 373-386.

[7] 任翠, 明森, 韩伟, 等. 一类带组合记忆项的 Tricomi 方程解的破裂 [J]. 中北大学学报(自然科学版), 2022, 43(5): 390-395.

REN Cui, MING Sen, HAN Wei, et al. Blow-up of solution to tricomi equation with combined memory terms [J]. Journal of North University of China (Natural Science Edition), 2022, 43(5): 390-395. (in Chinese)

[8] IKEDA M, LIN J Y, TU Z H. Small data blow-up for the weakly coupled system of the generalized Tricomi equations with multiple propagation speeds [J]. Journal of Evolution Equations, 2021, 21(4): 3765-3796.

[9] PALMIERI A. On the the critical exponent for the semilinear Euler-Poisson-Darboux-Tricomi equation with power nonlinearity [J]. 2021, arXiv: 2105.09879v1.

- [10] HASSEN M F B, HAMOUDA M, HAMZA M A, et al. Nonexistence result for the generalized Tricomi equation with the scale-invariant damping, mass term and time derivative nonlinearity[J]. *Asymptotic Analysis*, 2022, 128(4): 495-515.
- [11] HAMOUDA M, HAMZA M A, YOUSFI B. Blow-up and lifespan estimate for the generalized Tricomi equation with scale-invariant damping and time derivative nonlinearity on exterior domain [J]. 2023, arXiv: 2308.01272v2.
- [12] DENG K. Blow-up of solutions of some nonlinear hyperbolic systems [J]. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 1999, 29(3): 807-820.
- [13] XU W. Blowup for systems of semilinear wave equations with small initial data [J]. *Journal of Differential Equations*, 2004, 17(3): 198-206.
- [14] KUBO H, KUBOTA K, SUNAGAWA H. Large time behavior of solutions to semilinear systems of wave equations [J]. *Mathematische Annalen*, 2006, 335(2): 435-478.
- [15] HAMOUDA M, HAMZA M A. New blow-up result for the weakly coupled wave equations with a scale-invariant damping and time derivative nonlinearity [J]. 2020, arXiv: 2008.06569.
- [16] PALMIERI A, TAKAMURA H. Nonexistence of global solutions for a weakly coupled system of semilinear damped wave equations of derivative type in the scattering case [J]. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 2020, 17(13): 1-20.
- [17] YORDANOV B, ZHANG Q S. Finite time blow up for critical wave equations in high dimensions [J]. *Journal of Functional Analysis*, 2006, 231(2): 361-374.
- [18] TAKAMURA H. Improved Kato's lemma on ordinary differential inequality and its application to semilinear wave equations [J]. *Nonlinear Analysis*, 2015, 125: 227-240.
- [19] PALMIERI A, TU Z H. A blow-up result for a semilinear wave equation with scale-invariant damping and mass and nonlinearity of derivative type [J]. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 2019, 60(2): 1-23.